



Programma svolto di Matematica - A.S.2023/24

Docente: Maurizio Parasmò

Disciplina: Matematica

Classe: 1^a A (ESABAC)

Testo di riferimento adottato: L.Sasso - C.Zanone, Colori della matematica. Edizione BLU, Volume 1, Petrini

ALGEBRA

I NUMERI NATURALI. L'INSIEME \mathbb{N}

I numeri naturali come concetto intuitivo. L'insieme \mathbb{N} . La rappresentazione su una semiretta orientata. L'ordine tra i numeri naturali. Proprietà dell'insieme \mathbb{N} . Le operazioni sempre possibili in \mathbb{N} : l'addizione e la moltiplicazione. Le operazioni non sempre possibili nell'insieme \mathbb{N} : la sottrazione e la divisione. La divisione con resto. La proprietà commutativa e associativa per le operazioni di addizione e moltiplicazione. La proprietà distributiva (sia a dx che a sx) della moltiplicazione rispetto all'addizione ed alla sottrazione. La proprietà distributiva a dx della divisione rispetto all'addizione ed alla sottrazione. La proprietà invariantiva della divisione e della sottrazione. Lo zero e l'uno. Legge di annullamento del prodotto. Simbolismo insiemistico. Multipli e divisori di un numero naturale. Caratterizzazione dei numeri pari ($n = 2k, \forall k \in \mathbb{N}$)¹ e dei numeri dispari $n = 2k + 1, \forall k \in \mathbb{N}$)². I numeri primi³ e il crivello di Eratostene. Teorema fondamentale dell'aritmetica (solo enunciato). Criteri di divisibilità per 2, 3, 5, 11. Le potenze numeriche, definizione e proprietà. Il massimo comun divisore ed il minimo comune multiplo. Relazione tra massimo comune divisore e minimo comune multiplo. I numeri primi sono infiniti (dimostrazione facoltativa).

¹ si legge: n è uguale a 2 volte kappa, al variare di k nell'insieme N

² si legge: n è uguale a 2 volte kappa più uno, al variare di k nell'insieme N

³ ricordo che 1 non è considerato un numero primo. Il motivo è che in tal modo la fattorizzazione di un qualsiasi numero naturale $n > 1$ è sempre unica, a meno dell'ordine dei suoi fattori.

I NUMERI INTERI. L'INSIEME \mathbb{Z}

L'insieme dei numeri interi. L'insieme \mathbb{Z} . La rappresentazione su una retta orientata. Le quattro operazioni in \mathbb{Z} . La regola dei segni. Le potenze numeriche con base negativa.

I NUMERI RAZIONALI. L'INSIEME \mathbb{Q}

Definizione di frazione numerica. Frazioni proprie, improprie ed apparenti. Frazioni equivalenti. Proprietà invariantiva. Riduzione di una frazione ai minimi termini. Confronto tra frazioni. I numeri decimali finiti e periodici. Dal numero decimale alla frazione generatrice. Richiami sulle percentuali. Rappresentazione su una retta orientata: dove posizionare una frazione propria o impropria. Le quattro operazioni e le potenze nell'insieme \mathbb{Q} . Potenze con esponente negativo.

Cenni sull'insieme dei numeri reali \mathbb{R} .

INSIEMI

Definizione di insieme. Rappresentazione di un insieme (per elencazione, rappresentazione caratteristica e diagrammi di Eulero-Venn). I sottoinsiemi. Le operazioni tra insiemi (unione, intersezione, differenza, complementare, prodotto cartesiano). Simbolismo adottato.

LOGICA

Definizione di proposizione. Enunciato aperto e chiuso. I connettivi NOT, AND, OR, «se..., allora ...», «... se e solo se ...», per legare tra loro proposizioni semplici. Le tavole della verità dei connettivi elencati. Tautologie. Modus ponens e modus tollens (cenni necessari per la parte di geometrica).

I MONOMI

Definizione di monomio in forma generica ed in forma canonica (o normale). Anatomia di un monomio (parte numerica e parte letterale). Grado complessivo di un monomio. Grado di un monomio rispetto ad una sua variabile. Esempio di un "non monomio". Perché le lettere collaborano con i numeri⁴. Il monomio nullo. Monomi simili. Le quattro operazioni elementari estese ai monomi. Divisibilità tra monomi. L'opposto di un monomio. La potenza di un monomio. Il massimo comune divisore ed il minimo comune multiplo tra monomi.

⁴ cfr. pag.233 §6 del libro di testo

I POLINOMI

Definizione di polinomio. Polinomio in forma canonica (o ridotta, o normale). Anatomia di un polinomio (i termini, i coefficienti, il coefficiente direttore, il termine noto). Polinomi con due, tre o quattro termini (risp.^{te} binomio, trinomio e quadrinomio). Polinomio monico. Grado di ogni singolo termine di un polinomio. Grado complessivo di un polinomio. Grado di un polinomio rispetto ad una sua variabile. Polinomio ordinato in modo crescente rispetto ad una sua variabile (risp.^{te} in modo decrescente). Polinomio omogeneo. Polinomio simmetrico. Gli zeri (o radici) di un polinomio. Il polinomio nullo. Addizione, sottrazione e moltiplicazione estesa ai polinomi. L'opposto di un polinomio. Prodotti notevoli: quadrato di un binomio, quadrato di un trinomio, cubo di un binomio, somma per differenza. Il polinomio detto falso quadrato.

SCOMPOSIZIONE POLINOMI (DALLA DIVISIONE ALLA SCOMPOSIZIONE)

Cosa vuol dire scomporre (o fattorizzare) un polinomio. Divisione con resto tra polinomi. Relazione tra i gradi del dividendo, del divisore e del quoziente⁵. Stima sul grado del resto. Il valore di un polinomio $p(x)$ calcolato in un punto $x = a$, dove $a \in \mathbb{R}$. Gli zeri (o radici) di un polinomio. Dalla relazione $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$ ⁶ al teorema del resto (con dimostrazione). Corollario al teorema del resto: un criterio di divisibilità. Relazione tra zeri (o radici) di un polinomio e divisibilità: il teorema di Ruffini (con dimostrazione). Dove cercare le radici (o zeri) di un polinomio: il teorema degli zeri. Dalla sapiente combinazione del teorema degli zeri e del teorema di Ruffini una prima tecnica per scomporre i polinomi.

Ulteriori tecniche di scomposizione. Definizione di polinomio (a coefficienti razionali) riducibile. Definizione di polinomio (a coefficienti razionali) irriducibile. Il raccoglimento totale. Il raccoglimento parziale prima e totale poi. Riconoscere nel polinomio l'espansione di un prodotto notevole. Scomporre una differenza di quadrati. Scomporre una differenza o una somma di cubi (dimostrazione limitata ad esempi concreti⁷). Trinomio speciale con coefficiente direttore = 1 (monico) e $\neq 1$. Scomposizione mediante il teorema degli zeri. Massimo comun divisore e minimo comune multiplo tra polinomi.

⁵ ovviamente la somma tra i gradi del quoziente e del divisore deve essere uguale al grado del dividendo

⁶ in analogia con la divisione con resto tra numeri naturali chiamiamo $p(x)$ dividendo, $d(x)$ divisore, $q(x)$ quoziente ed $r(x)$ resto

⁷ per binomi del tipo $x^3 + 1$ o $x^3 - 1$

EQUAZIONI LINEARI IN UNA SOLA INCOGNITA

Definizione di equazione numerica. I due principi di equivalenza e relativi corollari (regola del trasporto e regola di cancellazione). Equazione in forma normale (o canonica). Grado di una equazione. Soluzione di un'equazione lineare. Equazione determinata, indeterminata ed impossibile (esempi per ognuno dei tre casi). Test per verificare la bontà di una soluzione.

Equazioni di grado $n \geq 2$ mediante scomposizione e legge di annullamento del prodotto.

Sistemi lineari 2×2 (due equazioni e due incognite). Come esplicitare una equazione rispetto ad una delle variabili. Tecnica risolutiva: per sostituzione.

FRAZIONI ALGEBRICHE

Definizione di frazione algebrica. Condizioni di esistenza. Le quattro operazioni elementari estese all'insieme delle frazioni algebriche. Semplificazione di frazioni algebriche. Equazioni algebriche.

GEOMETRIA SINTETICA

IL PIANO EUCLIDEO

Concetto primitivo di piano, punto e retta. Assiomi di appartenenza e di ordine. Definizione di fascio proprio di rette. Definizione di figura. Esempi di figure. Definizione di semiretta e di segmento. Segmenti consecutivi ed adiacenti. Definizione di poligonale aperta e poligonale chiusa. Figure convesse e concave. Assioma di partizione del piano da parte di una retta. Definizione di angolo. Angolo piatto, angolo giro ed angolo nullo. Angoli consecutivi, angoli adiacenti e angoli opposti al vertice. Definizione di poligono. Simbolismo relativo.

CONGRUENZA E MISURA

Definizione di figure congruenti. Richiami di logica per le dimostrazioni. La riga e il compasso come strumenti per tracciare segmenti e archi di circonferenza (ovvero per traslare e ruotare figure del piano). Primo assioma di congruenza (proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva). Secondo assioma di congruenza (tutti i punti sono congruenti tra loro, idem per le rette e per i piani). Terzo assioma di congruenza (trasporto di segmenti ed angoli). Definizione di poligono regolare e circonferenza. Confronto tra segmenti. Somma, differenza, multipli e sottomultipli di un segmento. Quarto assioma: la somma, la differenza, multipli e sottomultipli di segmenti congruenti sono congruenti. Il punto medio di un

segmento (costruito con riga e compasso). In modo analogo. Confronto tra angoli. Somma, differenza, multipli e sottomultipli di un angolo. Quinto assioma: la somma, la differenza, multipli e sottomultipli di angoli congruenti sono congruenti. La bisettrice di un angolo. Angoli retti, acuti e ottusi. Angoli complementari, angoli supplementari ed angoli esplementari.

Tre teoremi importanti:

1. I complementari di angoli congruenti sono congruenti;
2. i supplementari di angoli congruenti sono congruenti;
3. gli angoli opposti al vertice sono congruenti.

Misure di segmenti e proprietà. Misure di angoli e proprietà. Il grado sessagesimale come unità di misura dell'angolo. Operazioni di addizione e sottrazione tra gradi sessagesimali e sottomultipli.

TRIANGOLI

Definizione di triangolo. Classificazione dei triangoli. La base, la bisettrice, la mediana e l'altezza di un triangolo. Definizione di triangoli congruenti. Primo, secondo e terzo criterio di congruenza per i triangoli (dimostrazione solo per il 1° ed il 2°, vista con GeoGebra). Definizione di triangolo isoscele, il lati obliqui, il suo angolo al vertice e gli angoli alla base. Congruenza degli angoli alla base di un triangolo isoscele (e viceversa: se gli angoli alla base sono congruenti il triangolo è isoscele). L'altezza, la bisettrice e la mediana, relativamente all'angolo al vertice di un triangolo isoscele, coincidono tra loro. Definizione di angolo esterno ad un triangolo. Teorema: ogni angolo esterno ad un triangolo è maggiore della somma degli angoli interni non adiacenti. Teorema: all'angolo maggiore è opposto il lato maggiore. Ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due (disuguaglianza triangolare) e maggiore della loro differenza. Costruzione del punto medio di un segmento con riga e compasso e della bisettrice di un angolo (con GeoGebra)

RETTE PARALLELE E RETTE PERPENDICOLARI

Rette incidenti, perpendicolari e parallele. Definizione coppia di rette ortogonali (costruzione con riga e compasso tramite GeoGebra). Teorema di esistenza ed unicità della retta ortogonale passante per un punto fissato. (dimostrazione sola esistenza). Proiezione ortogonale di un punto e di un segmento su una retta. Se due rette r ed s perpendicolari alla stessa retta allora esse sono parallele. Assioma della parallela (o postulato di Euclide). Transitività del parallelismo tra rette. La totalità delle rette parallele ad una retta assegnata è una particolare famiglia di rette chiamata fascio improprio di rette.

CRITERI DI PARALLELISMO

Angoli alterni, corrispondenti e coniugati. Criteri di parallelismo (due rette sono parallele se e solo se, tagliate da una trasversale, formano coppie di angoli alterni interni congruenti; teorema 7). Teorema angolo esterno. La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a π . Secondo criterio di congruenza generalizzato. Distanza punto-retta. Somma degli angoli interni ad un poligono convesso (teorema 13, con dimostrazione). Ogni angolo esterno è congruente alla somma degli angoli interno non adiacenti. Criteri di congruenza tra triangoli rettangoli.

Torino, 22/Giugno/2024

Il docente

Maurizio Parasmò