LICEO SCIENTIFICO DI STATO "CARLO CATTANEO"
Sede Centrale: Via Sostegno 41/10 - 10146 TORINO - tel: 011 7732013-7732014 fax: 011 7732014
Succursale: Via Postumia 57/60 - 10142 TORINO - tel: 011 7071984 fax: 011 7078256
e-mail: tops120003@istruzione.it
Cod. scuola TOPS120003 C.F. 80091280018 Codice univoco UFXDPQ

ANNO SCOLASTICO 2023-2024 CLASSE 3^ F

COMPITI PER LE VACANZE ESTIVE: MATEMATICA

DOCENTE: ANNA PANELLA

PRIMA SETTIMANA

1. Risolvi la disequazione: $\frac{|x-1|+\sqrt{|x^3-x|}}{|x^2-x|-4x} \geq 0$
2. Considera la funzione $y = \frac{x+2}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}$
   a. Classificala e determina il suo dominio
   b. Determina f(2)
   c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.
   d. Stabilisci se la funzione data è uguale alla funzione $y = \frac{x+2}{x-1}\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\right)$
3. Considera il triangolo di vertici $A(-1;\ -1),\ B(0;2),\ C(3;1))$
   a. Verifica che è isoscele e determina il suo perimetro e la sua area
   b. Stabilisci se il triangolo è rettangolo
   c. Determina le equazioni delle rette che contengono i suoi lati
   d. Determina l'equazione della retta che contiene l'altezza relativa all'ipotenusa
4. Determina l'equazione della parabola corrispondente di quella di equazione $y = x^2$ mediante:
   a. La traslazione τ di vettore $\vec{v}(-1;1)$
   b. La simmetria σ rispetto all'asse x
   c. La trasformazione $\tau \circ \sigma$
5. Risolvi graficamente la disequazione irrazionale: $\sqrt{1+4x-x^2} \geq 3-x$
6. Considera la parabola di equazione $y = x^2 - k^2$, con $k > 0$. Determina k in modo che l'area del segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse x sia 36. Determina poi i nvertici del rettangolo inscritto nel segmento parabolico di perimetro massimo.
7. Un'ellisse passa per i due punti A e B, appartenenti alla retta di equazione $x+y-4=0$ e aventi rispettivamente ascissa 2 e 4. Scrivi l'equazione dell'ellisse.
8. Determina i punti dell'iperbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ che formano con i fuochi un triangolo di area 12.
9. Determina il dominio della funzione: $y = \frac{\sqrt{100-x^2}}{\sqrt[3]{2^x}-8}$
10. Risolvi: $\log_5(x+3) < \log_{25}(x^2+2x)$

LICEO SCIENTIFICO DI STATO "CARLO CATTANEO"
Sede Centrale: Via Sostegno 41/10 - 10146 TORINO - tel: 011 7732013-7732014 fax: 011 7732014
Succursale: Via Postumia 57/60 - 10142 TORINO - tel: 011 7071984 fax: 011 7078256
e-mail: tops120003@istruzione.it
Cod. scuola TOPS120003 C.F. 80091280018 Codice univoco UFXDPQ

SECONDA SETTIMANA

1. Risolvi: $\begin{cases} x^2-4x+4 \geq 0 \\ x^2-9x \leq 0 \\ -1 < \frac{1}{1-x} \end{cases}$
2. Determina a, b, c in modo che la funzione $y = x^4 + ax^2 + bx + c$ sia pari e passi per i punti di coordinate $(-1;0)$, $(0;3)$
3. Dati i punti $A(0;\,-1)$, $B(4;1)$, determina i restanti vertici del rombo ABCD, di diagonale AC, sapendo che B appartiene alla bisettrice del primo e terzo quadrante.
4. Applicando opportune trasformazioni deduci, a partire dal grafico di $y = \sqrt[3]{x}$, il grafico di $y = \left|\sqrt[3]{x-2} - 1\right|$. Individua, in particolare, gli zeri della funzione, nonché il suo dominio e la sua immagine.
5. Scrivi l'equazione della circonferenza tangente in $P(3;3)$ alla bisettrice del primo e terzo quadrante e passante per $Q(-1;3)$.
6. Considera la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e indica con V il suo vertice. Determina la misura della corda staccata sulla parabola dalla retta passante per V e parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.
7. Determina per quale valore di a, con a > 0, l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse $a^2x^2 + 16y^2 = 1$ è uguale a 4π.
8. Scrivi l'equazione dell'iperbole avente fuochi in $(1;\,-2)$, $(1;4)$ passante per $P(1;3)$
9. Risolvi: $8^{|x-2|} = 2\sqrt{2}$
10. Determina il valore dell'espressione: $\frac{(\log_4 3)(\log_2 3)^{-1} + \log_4 \sqrt[3]{2}}{\log_2 28 - (\log_3 7)(\log_3 2)^{-1}}$

LICEO SCIENTIFICO DI STATO "CARLO CATTANEO"
Sede Centrale: Via Sostegno 41/10 - 10146 TORINO - tel: 011 7732013-7732014 fax: 011 7732014
Succursale: Via Postumia 57/60 - 10142 TORINO - tel: 011 7071984 fax: 011 7078256
e-mail: tops120003@istruzione.it
Cod. scuola TOPS120003 C.F. 80091280018 Codice univoco UFXDPQ

TERZA SETTIMANA

1. In una circonferenza di raggio 2 considera una corda AB e indica con x la distanza della corda dal centro della circonferenza. Per quali valori di x la misura della corda è minore del doppio della distanza della corda dal centro della circonferenza?
2. Un trapezio isoscele non degenere ABCD è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB, il cui raggio misura 1. Esprimi, in funzione della misura x dei lati obliqui del trapezio, il perimetro del trapezio stesso. Qual è il dominio della funzione così scaturita, in relazione al problema geometrico?
3. Determina per quali valori di k la retta d'equazione $(k^2-1)x-(k^2+2)y+2k=0$
   a. Passa per $P(-2;4)$
   b. È parallela all'asse x
   c. È parallela alla retta d'equazione $4x+2y-3=0$
   d. È perpendicolare all'asse x
   e. È perpendicolare alla retta d'equazione $2x+y-3=0$
4. Dato il triangolo di vertici $A(2;0), B(4;2), C(4;\ -1)$, determina le coordinate dei vertici del triangolo a esso simmetrico rispetto alla retta di equazione $y=2x$ e verifica che anche i baricentri dei due triangoli sono simmetrici rispetto a essa.
5. Studia il fascio di circonferenze: $x^2+y^2-2(k-1)x-4ky-1=0$
6. Determina le rette tangenti alla parabola di equazione $y=-x^2+4x+2$ passanti per il punto $P(3;6)$ e calcola l'area del triangolo APB, essendo A e B i punti di contatto delle tangenti con la parabola.
7. Determina k in modo che la retta tangente all'ellisse di equazione $4x^2+y^2-8x-ky=0$ nell'origine degli assi sia la bisettrice del primo e terzo quadrante.
8. Rappresenta graficamente l'iperbole d'equazione $y=\frac{x-2}{2x+4}$ e scrivi le equazioni degli assi di simmetria dell'iperbole.
9. Considera la funzione $y=4^{-x}$.
   a. Traccia la curva γ che rappresenta il grafico della funzione data
   b. Scrivi l'equazione della curva γ', simmetrica di γ rispetto alla retta d'equazione $y=\frac{1}{2}$
   c. Determina le coordinate del punto di intersezione di γ e γ'.
10. Risolvi: $2logx-log(x+3)=log(2-x)$

LICEO SCIENTIFICO DI STATO "CARLO CATTANEO"
Sede Centrale: Via Sostegno 41/10 - 10146 TORINO - tel: 011 7732013-7732014 fax: 011 7732014
Succursale: Via Postumia 57/60 - 10142 TORINO - tel: 011 7071984 fax: 011 7078256
e-mail: tops120003@istruzione.it
Cod. scuola TOPS120003 C.F. 80091280018 Codice univoco UFXDPQ

QUARTA SETTIMANA

1. Risolvi: $\begin{cases} \sqrt{x^2-2x} > 3-x \\ |x-2| > 1 \end{cases}$
2. Considera la funzione $y = \frac{|x+2|-1}{\sqrt{x^2+1}-x}$
   a. Classificala e determina il suo dominio
   b. Determina $f\left(-2\sqrt{2}\right)$
   c. Studia il segno della funzione e rappresenta nel piano cartesiano le regioni alle quali appartiene il suo grafico. Specifica quali sono gli eventuali zeri della funzione.
   d. Giustifica perché la funzione data non è invertibile.
3. Determina per quali valori di k il grafico della funzione $y = (k^2-4k)x + 2k - 1$ forma con l'asse x un angolo ottuso e interseca l'asse y in un punto di ordinata positiva.
4. Siano r la retta passante per $A(0;3)$, che interseca l'asse x nel punto $B(-1;0)$, s la retta passante per A e perpendicolare a r e C il punto di intersezione della retta s con l'asse x. Determina sul segmento BC il punto P tale che, dette H e K, rispettivamente, le proiezioni di P su r e su s, sia $2\overline{PH} = \overline{PK}$.
5. Traccia il grafico di $y = f(|x|)$ con $y = |x| + 2$
6. Scrivi l'equazione della circonferenza che passa per $A(-2;0)$, $B(2;4)$ e avente il centro sull'asse x.
7. Determina per quali valori di k la parabola di equazione $y = (k-3)x^2 - 2kx - 1$ interseca l'asse x in due punti distinti e ha la concavità rivolta verso il basso.
8. Data l'ellisse d'equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ e la retta d'equazione $y = -x + 1$:
   a. Trova le coordinate dei due punti di intersezione A e B $(con\ x_A < x_B)$ tra l'elisse e la retta
   b. Scrivi le equazioni delle rette tangenti all'ellisse in A e B
   c. Determina l'area del triangolo ABC, essendo C il punto di intersezione delle tangenti in A e B all'ellisse.
9. Si studia la crescita di un vegetale a partire da un certo istante iniziale $(t = 0)$. La crescita viene valutata in base al diametro del fusto principale, che è ben modellizzata dalla funzione: $D(t) = \frac{12}{1+18e^{-0,5t}}$ dove D(t) indica la misura del diametro (espressa in cm) e t il tempo (misurato in settimane). Dopo quanto tempo il diametro del vegetale supera i 6 cm?
10. Risolvi: $\log_{1/2} x + \log_{1/2}(x-1) \geq 0$

QUINTA SETTIMANA

1. Risolvi: $\begin{cases} x^3 - x^2 \leq 0 \\ \sqrt{x^2 - 3x} \leq |x-1| \\ \left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 2x \end{cases}$
2. Studia il segno della funzione, dopo averla classificata e averne determinato il dominio, e indica la parte del piano alla quale appartiene il suo grafico: $y = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{10-x}}{x^2-9}$
3. Dopo aver studiato il fascio $(k+1)x - (k+2)y + 2 = 0$, determina l'equazione della retta:
   a. passante per $P(-2; 4)$
   b. parallela all'asse y
   c. parallela alla retta d'equazione $4x + 2y - 3 = 0$
   d. perpendicolare all'asse y
   e. perpendicolare alla retta d'equazione $x - 5y - 3 = 0$.
4. Un trapezio rettangolo ABCD è tale che la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC. La base maggiore AB del trapezio misura 13 e la base minore misura 9. Riferito il trapezio ad un opportuno sistema di assi cartesiani ortogonali, determina:
   a. le coordinate dei vertici del trapezio
   b. il perimetro e l'area
   c. il punto di intersezione P delle diagonali
5. In un sistema di assi cartesiani ortogonali scrivi l'equazione della retta r', simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, di una generica retta r di equazione $y = mx$. Individua la coppia di rette r e r' tali che il triangolo formato da esse e da una perpendicolare alla bisettrice considerata abbia l'altezza uguale alla base.
6. Scrivi l'equazione del fascio generato dalle circonferenze di equazioni: $x^2 + y^2 + 2x = 0$ e $x^2 + y^2 - 1 = 0$; individua i punti base, l'asse radicale e le caratteristiche del fascio. Scrivi poi l'equazione della circonferenza del fascio avente il centro sulla retta d'equazione: $y = x + 2$.
7. Determina l'equazione della retta parallela all'asse x che stacca sulla parabola di equazione $y = x^2 - 4$ una corda la cui lunghezza è il triplo della corda staccata dalla stessa retta sulla parabola d' equazione $y = (x-2)^2$.
8. Determina i vertici del quadrato inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.
9. Dopo aver studiato il fascio di funzioni omografiche di equazione $y = \frac{kx+1}{(k+1)x+2k}$, determina l'equazione dell'iperbole del fascio avente come asintoto verticale la retta di equazione $x = -4$ e rappresentala graficamente.
10. Considera la funzione $f(x) = 2^{2x} + a \cdot 2^{x+1} - 2a + 3$ dove a è un parametro reale.
    a. Determina per quale valore di a il cui grafico passa per il punto di coordinate $\left(-1; \frac{13}{4}\right)$
    b. In corrispondenza del valore di a di cui al punto precedente, traccia i grafici delle due funzioni: $y = f(x)$, $y = |f(x) - 4|$
    c. Determina i punti di intersezione dei grafici tracciati al punto precedente con la retta di equazione $y = 11$
    d. Stabilisci per quali $a \in \mathbb{R}$ il grafico della funzione originaria non ha alcun punto di intersezione con l'asse x

SESTA SETTIMANA

1. In un triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa BC misura 5 e il cateto AC misura 3. Considera un punto P su BC e indica con H la sua proiezione su AC. Quali valori deve assumere la misura di PH perché l'area del trapezio ABPH sia minore o uguale a 3?
2. Giustifica perché la funzione $f(x) = x^3 + 1$ è invertibile e determina l'espressione analitica dell'inversa. Verifica che $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$
3. Rappresenta graficamente: $\begin{cases} y \geq -1 \\ y \leq 2 \\ y < x + 4 \\ y < -x + 3 \end{cases}$
4. Determina le equazioni delle due rette r e r', parallele alla retta di equazione $y = 2x$ e distanti $2\sqrt{5}$ dall'origine. Individua poi un punto P rispetto al quale le due rette r e r' sono simmetriche. Il punto P è unico o ne esistono infiniti?
5. Scrivi le equazioni delle circonferenze passanti per $A(2; 1)$, aventi il centro sulla retta di equazione $2x + y - 3 = 0$ e tangenti all'asse x.
6. Risolvi graficamente: $\sqrt{4x - x^2} \leq 2\sqrt{3 - x}$
7. Considera l'equazione $kx^2 + y^2 = 1$. Determina per quali valori di k essa:
   a. Rappresenta un'ellisse
   b. Rappresenta un'ellisse di eccentricità ½
   c. Trova i vertici e i fuochi delle ellissi corrispondenti ai valori di k trovati al punto precedente.
8. Traccia il grafico dell'iperbole $4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y - 41 = 0$
9. Considera i punti $A(-2; 0)\ e\ B(4; 0)$. Scrivi l'equazione del luogo dei punti P del piano per i quali il triangolo APB ha perimetro 14.
10. Risolvi: $log^2 x - 6 log\sqrt{x} > -2$

LICEO SCIENTIFICO DI STATO "CARLO CATTANEO"
Sede Centrale: Via Sostegno 41/10 - 10146 TORINO - tel: 011 7732013-7732014 fax: 011 7732014
Succursale: Via Postumia 57/60 - 10142 TORINO - tel: 011 7071984 fax: 011 7078256
e-mail: tops120003@istruzione.it
Cod. scuola TOPS120003 C.F. 80091280018 Codice univoco UFXDPQ

SETTIMA SETTIMANA

1. Risolvi: $\begin{cases} \frac{1}{x-1} \geq -1 \\ \left(x+\sqrt{2}\right)^2 - \left(x-\sqrt{2}\right)^2 > -\sqrt{2}(x+1) \end{cases}$
2. Siano date le due funzioni $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + k$. Determina:
   a. Per quale valore di k il grafico della funzione $f \circ g$ interseca l'asse x nel punto di coordinate $(2; 0)$
   b. Per quale valore di k il grafico della funzione $g \circ f$ intersea l'asse y nel punto di coordinate $(0; 2)$
3. Traccia il grafico: $\begin{cases} |x+2| & se\ x < 0 \\ 2 - |x| & se\ 0 \leq x < 4 \\ -|x-6| & se\ x \geq 4 \end{cases}$
4. Dati i punti $A(-1; -2)\ e\ B(3; 2)$, siano A' e B' i corrispondenti di A e B in una traslazione. Determina tale traslazione in modo che il parallelogramma ABB'A' abbia area 16 e perimetro $8\sqrt{2} + 4\sqrt{10}$.
5. Conduci dal punto $P(3; 1)$ le rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Indica con Q ed R i punti di contatto delle tangenti con la circonferenza e verifica che il triangolo PQR è equilatero.
6. Scrivi l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2$ e perpendicolare alla retta d'equazione $y = -2x$. Determina poi le coordinate del punto di contatto tra la retta e la parabola.
7. Scrivi 'equazione dell'ellisse avente fuochi $F_1\left(-\sqrt{6}; 0\right), F_2\left(\sqrt{6}; 0\right)$ e un vertice in $V\left(0; \sqrt{2}\right)$. Considera il punto P dell'ellisse di ascissa 2 appartenente al primo quadrante e verifica che la normale in P all'ellisse è la bisettrice dell'angolo $F_1\hat{P}F_2$.
8. Determina per quali valori di k l'equazione $(2k-1)x^2 + (k-2)y^2 = k - 1$
   a. Rappresenta un'iperbole
   b. Rappresenta un'iperbole con i fuochi sull'asse x
   c. Rappresenta un'iperbole con i fuochi sull'asse y.
9. Detto V il punto le cui coordinate $(x; y)$ risolvono il sistema $\begin{cases} 2log_2(x+4) + 3log_2(y-1) = -1 \\ 3log_2(x+4) - 5log_2(y-1) = 8 \end{cases}$ scrivi l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, avente vertice V e passante per il puto $A(1; 0)$.
10. Risolvi: $log_2 x + log_x 2 \geq \frac{5}{2}$