

# Compiti di matematica per le vacanze estive della 2<sup>a</sup>D

prof. Federico Miceli

estate 2024

Ripassa i seguenti argomenti, trattati nel corso dell'anno scolastico. Gli argomenti più importanti sono evidenziati in rosso:

- Espressioni coi radicali (capitoli 15 e 16);
- **Il piano cartesiano e la retta** (capitolo 17);
- **Le equazioni di secondo grado** (capitolo 18);
- **I sistemi non lineari di equazioni** (capitolo 19);
- Disequazioni non lineari e sistemi di disequazioni (capitoli 20 e 21);
- La probabilità (capitolo 22);
- La circonferenza e i poligoni inscritti e circoscritti (capitolo G5);
- **I triangoli rettangoli** (capitolo G6);
- La proporzione e la similitudine (capitolo G7).

**Attenzione!** Gli esercizi assegnati durante le vacanze estive servono per tenerti allenato/a nel corso della lunga pausa estiva. **Non** svolgere tutti gli esercizi in una finestra di tempo ristretta (di poche settimane, o addirittura pochi giorni), poiché ciò ne ridurrebbe notevolmente l'utilità! Idealmente, cerca di svolgerli nell'arco di 10 settimane, secondo la suddivisione suggerita.

Considera che tali esercizi hanno una doppia funzione:

- fare pratica sugli argomenti studiati;
- individuare eventuali lacune, su cui focalizzare i propri sforzi (ripassando la relativa teoria e svolgendo esercizi extra). Non ha quindi senso tralasciare gli esercizi sugli argomenti meno chiari. Al contrario, questi sono i mesi in cui concentrare i propri sforzi proprio su questi tipi di esercizi.

**Nota:** per ogni esercizio è indicato anche numero e pagina dell'esercizio sul libro di testo (dal *Sasso*, che viene utilizzato in altre classi seconde del Cattaneo). **Sulla classroom verrà condiviso un pdf con l'elenco delle soluzioni.**

**Non guardare il risultato dell'esercizio prima di averlo concluso.**

**Attenzione!** Scrivi ogni esercizio (soprattutto quelli di geometria) in modo corretto e "pulito". Svolgi la bella degli esercizi su un **quaderno**, in cui potrai anche produrre eventuali schemi riassuntivi relativi alle parti di teoria ripassata. Il quaderno degli esercizi deve essere chiaramente **leggibile** e ordinato. Deve essere diverso dal quaderno che utilizzerai in terza (potrà essere ritirato dal docente a settembre).

**Nota:** se sei bloccato/a su un esercizio, puoi scrivere sulla classroom, chiedendo un piccolo suggerimento ai tuoi compagni (o al docente).

Ricordati di fare un **disegno grande** per ciascun esercizio di geometria (anche analitica).

**Attenzione!** Molti dei problemi proposti possono essere risolti impostando e risolvendo un'equazione o un sistema di equazioni. Soluzioni trovate "a occhio" e solo verificate non sono mai considerate accettabili, anche se tecnicamente corrette.

## Esercizi di esempio

**Nota:** Gli esercizi in questa pagina **non** sono assegnati come compito. Sulla classroom verranno condivise le soluzioni di questi esercizi. Tali soluzioni fungono da “guida” su come svolgere gli esercizi assegnati che troverai nelle prossime pagine.

**Attenzione!** Gli esercizi devono essere svolti su un quaderno delle vacanze, e dovrebbero idealmente essere scritti come quelli di esempio condivisi sulla classroom.

**Esercizio 0.1** (es.909 pag.62). Semplifica la seguente espressione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} - \sqrt[4]{16a^2+32a+16}$$

**Esercizio 0.2** (es.689 pag.395). Risolvi il seguente sistema di disequazioni. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\begin{cases} x^3 - 4x \leq 0 \\ \frac{x^2+5x+6}{2x-x^2-3} < 0 \end{cases}$$

**Esercizio 0.3** (es.133 pag.425). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 4 \\ x^2 - 2y^2 = -1 \end{cases}$$

**Esercizio 0.4** (es.177 pag.740). Il raggio di una semicirconferenza di centro  $O$  e diametro  $AB$  è  $r$ . Determina la misura di una corda  $CD$ , parallela ad  $AB$  (con  $C$  più vicino ad  $A$  che a  $B$ ) in modo che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati del trapezio  $ABCD$  sia  $\frac{15}{2}r^2$ .

**Esercizio 0.5** (es.336 pag.439). Un rombo ha il perimetro di 16 cm e la circonferenza inscritta ha il raggio di 2 cm. Determina la lunghezza delle diagonali del rombo.

**Esercizio 0.6** (es.412 pag.198). Sia  $P$  il punto di intersezione delle rette di equazioni  $x - y - 1 = 0$  e  $x + 2y + 1 = 0$  e  $r$  la retta di equazione  $2x + y + 1 = 0$ . Scrivi l'equazione della retta passante per  $P$  e parallela a  $r$  e l'equazione della retta passante per  $P$  e perpendicolare a  $r$ .

**Esercizio 0.7** (es.886 pag.309). Un triangolo acutangolo  $ABC$ , isoscele sulla base  $AB$ , è inscritto in una circonferenza di raggio unitario. Quanto può valere, al massimo, la somma delle misure delle aree dei quadrati costruiti sui lati di  $ABC$ ?

**Esercizio 0.8** (es.135 pag.571). Maria lancia una moneta e, se esce «testa», l'indomani si farà interrogare in Italiano, altrimenti si farà interrogare in Matematica. Maria stima che la probabilità di prendere più di 7 nell'interrogazione è  $\frac{2}{3}$  in Italiano e  $\frac{1}{3}$  in Matematica.

- Qual è la probabilità che l'indomani Maria si faccia interrogare in Italiano e prenda più di 7?
- Qual è la probabilità che l'indomani Maria si faccia interrogare in Matematica e prenda più di 7?
- Qual è la probabilità che l'indomani Maria prenda più di 7?

**Esercizio 0.9** (es.147 pag.626). Due archi  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  di una circonferenza sono congruenti e non hanno punti in comune (i punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  si susseguono sulla circonferenza in quest'ordine). Dimostra che il quadrilatero  $ABCD$  è un trapezio isoscele.

**Esercizio 0.10** (es.93 pag.796). Dimostra che in un trapezio rettangolo, in cui le diagonali sono perpendicolari, l'altezza è media proporzionale tra le basi.

# 1 Settimana n°1

**Esercizio 1.1** (es.142 pag.626). Siano  $AB$  e  $CD$  due corde parallele di una circonferenza (tali che  $A, B, C$  e  $D$  si susseguono sulla circonferenza in quest'ordine). Sia  $E$  il punto di intersezione di  $AC$  e  $BD$ . Dimostra che i triangoli  $AEB$  e  $CED$  sono isosceli.

**Esercizio 1.2** (es.267 pag.435). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3yz \\ x - 2y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 1.3** (es.243 pag.187). Determina per quale valore di  $a$  la retta di equazione  $ax + y + a - 3 = 0$  passa per il punto  $P(1; 2)$ .

**Esercizio 1.4** (es.906 pag.62). Semplifica la seguente espressione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \sqrt{9x} \sqrt{x+1} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

**Esercizio 1.5** (es.326 pag.438). La somma delle aree di due quadrati è  $40 \text{ cm}^2$  e la somma dei loro perimetri è  $32 \text{ cm}$ . Determina le lunghezze dei lati dei due quadrati.

**Esercizio 1.6** (es.63 pag.560). Si lancia una moneta regolare tre volte, consecutivamente.

- Rappresenta tramite un diagramma ad albero tutti i possibili esiti.
- Determina la probabilità che si ottenga «testa» per la prima volta al primo lancio.
- Determina la probabilità che si ottenga «testa» per la prima volta al secondo lancio.
- Determina la probabilità che si ottenga «testa» per la prima volta al terzo lancio.
- Determina la probabilità che non si ottenga mai «testa».

**Esercizio 1.7** (es.384 pag.378). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{(x+1)^3 - (x^2-1)(x+2)}{x^5 - 4x^3} \leq 0$$

**Esercizio 1.8** (es.564 pag.209). Un parallelogramma  $ABCD$  è tale che  $A(2; -2)$  e  $B(5; 0)$ ; inoltre è noto che il lato  $BC$  giace su una retta parallela alla retta di equazione  $y = -2x$  e che il vertice  $C$  ha ordinata 3. Determina le coordinate dei vertici  $C$  e  $D$  del parallelogramma.

## 2 Settimana n°2

**Esercizio 2.1** (es.90 pag.796). Dato un triangolo  $ABC$ , rettangolo in  $A$ , traccia la mediana  $AM$  e da  $M$  la perpendicolare ad  $AB$  che incontra  $AB$  nel punto  $D$ . Dimostra che il triangolo  $ABC$  è simile al triangolo  $ADM$ .

**Esercizio 2.2** (es.136 pag.425). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - x - 2y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

**Esercizio 2.3** (es.406 pag.198). Determina l'equazione della retta passante per il punto  $P(-1; 2)$ :

- parallela alla retta passante per  $A(-4; -2)$ ,  $B(0; 2)$ ;
- perpendicolare alla retta passante per  $A(1; 4)$  e  $B(-8; 5)$ .

**Esercizio 2.4** (es.684 pag.395). Risolvi il seguente sistema di disequazioni. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\begin{cases} \frac{5-x}{x^2-4} \geq 0 \\ \frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{6} \end{cases}$$

**Esercizio 2.5** (es.308 pag.437). Un negoziante di abbigliamento incassa in un certo mese 2000 euro dalla vendita di un certo tipo di scarpe. Il mese successivo, il negoziante vende quattro paia di scarpe in meno, ma incassa 80 euro in più, perché ha aumentato il prezzo delle scarpe di 30 euro al paio. Determina il prezzo delle scarpe e il numero di paia vendute nel primo mese.

**Esercizio 2.6** (es.191 pag.576). Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, si ottengano due facce con numeri consecutivi.

**Esercizio 2.7** (es.247 pag.372). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$(x - \sqrt{2})^2 + (x + \sqrt{2})^2 \geq (x - \sqrt{3})^2 + 2x\sqrt{3}$$

**Esercizio 2.8** (es.175 pag.740). In un trapezio rettangolo  $ABCD$  (non degenere) di perimetro 20 cm, il lato obliquo  $BC$  è lungo 5 cm e la base minore  $CD$  è congruente all'altezza  $AD$ . Determina le lunghezze delle basi e dell'altezza del trapezio.

### 3 Settimana n°3

**Esercizio 3.1** (es.97 pag.659). In un triangolo  $ABC$  siano  $G$  il baricentro,  $M$  il punto medio di  $AC$  e  $N$  il punto medio di  $AB$ . Dimostra che il quadrilatero  $ANGM$  è circoscrittibile a una circonferenza se e solo se  $AB + GB \cong AC + GC$ .

**Esercizio 3.2** (es.126 pag.424). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)^2 = (x+y)(x-y) + 2 \\ (x-y)^2 = y + 1 \end{cases}$$

**Esercizio 3.3** (es.293 pag.190). Nel fascio improprio di rette avente come retta base la retta  $r : x - 2y = 0$ , determina l'equazione della retta passante per  $P(3; 1)$ .

**Esercizio 3.4** (es.910 pag.62). Semplifica la seguente espressione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\left[ \left( a - \sqrt{a+1} + \frac{a}{a + \sqrt{a+1}} \right) \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} \right) \right] : \left( \sqrt{\frac{1}{a}} - \frac{1}{a} \right)$$

**Esercizio 3.5** (es.334 pag.438). In un trapezio rettangolo la somma delle basi è pari a 13 cm, il lato obliquo è lungo 5 cm e la diagonale maggiore è lunga  $4\sqrt{5}$  cm. Determina il perimetro del trapezio.

**Esercizio 3.6** (es.67 pag.561). Una pulce si trova sull'asse delle ascisse, precisamente nell'origine degli assi. A ogni passo la pulce compie a caso un salto di una unità in avanti (cioè nella direzione e nel verso delle ascisse positive) o indietro (cioè nella direzione e nel verso delle ascisse negative). Supponi che la pulce compia quattro salti:

- Rappresenta la situazione tramite un diagramma ad albero e deduci quali sono le ascisse dei punti in cui la pulce può trovarsi dopo i quattro salti.
- Per ciascuno dei punti in cui la pulce può trovarsi dopo i quattro salti, calcola la probabilità che la pulce si trovi in quel punto.

**Esercizio 3.7** (es.389 pag.378). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x - 4)}{x^2 + 3x - 4} > 0$$

**Esercizio 3.8** (es.887 pag.309). In un triangolo rettangolo  $ABC$  l'ipotenusa  $AB$  misura 4 e  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ . Indica con  $M$  il punto medio di  $BC$  e con  $N$  il punto medio di  $AB$ ; preso un punto  $P$  sul lato  $AC$ , tale che  $\overline{AP} = x$ , determina per quale valore di  $x$  è minima la somma dei quadrati delle misure dei lati del triangolo  $PMN$ .

## 4 Settimana n°4

**Esercizio 4.1** (es.41 pag.791). In un triangolo  $ABC$ , sia  $AM$  la mediana uscente da  $A$ . Considera un punto  $P$  su  $AM$  e traccia per  $P$  le rette parallele da  $AB$  e ad  $AC$ , indicando con  $P'$  e  $Q'$ , rispettivamente, i punti in cui tali rette incontrano  $BC$ . Dimostra che  $PM$  è la mediana del triangolo  $P'PQ'$ .

**Esercizio 4.2** (es.24 pag.419). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{(x+y)(x-y)}{10} + \frac{(x+y)^2}{2} = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 4.3** (es.425 pag.199). Determina l'ortocentro del triangolo  $ABC$ , di vertici  $A(-1;2)$ ,  $B(3;2)$ ,  $C(5;4)$ .

**Esercizio 4.4** (es.680 pag.395). Risolvi il seguente sistema di disequazioni. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\begin{cases} 36 > x^2 \\ x^2 - 3x > -2 \\ 8x^3 > 1 \end{cases}$$

**Esercizio 4.5** (es.342 pag.439). Due cerchi di raggio  $r$  sono tali che la distanza fra i loro centri è congruente al raggio. Determina i lati di un rettangolo il cui perimetro misura  $\frac{18}{5}r$ , inscritto nella parte comune ai due cerchi.

**Esercizio 4.6** (es.189 pag.576). In un'urna ci sono 7 biglie rosse, 4 biglie nere e  $n$  biglie verdi. Estraendo a caso una biglia dell'urna, la probabilità di estrarre una biglia che non sia nera è 0,75. Quante biglie verdi ci sono nell'urna?

**Esercizio 4.7** (es.234 pag.372). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\left(\frac{x-1}{2} - 1\right) \left(\frac{x+2}{3} + 1\right) \geq -2$$

**Esercizio 4.8** (es.179 pag.741). Un trapezio isoscele  $ABCD$  è inscritto in un semicerchio di diametro  $AB$ . I lati obliqui del trapezio misurano  $\frac{3}{2}a$  e la base maggiore  $AB$  è  $\frac{25}{7}$  della base minore  $CD$ . Determina perimetro e area del trapezio.

## 5 Settimana n°5

**Esercizio 5.1** (es.88 pag.620). Siano  $r$ ,  $s$  e  $t$  tre rette distinte, tangenti a una circonferenza di centro  $O$ , tali che  $r$  e  $s$  si incontrano nel punto  $A$ , mentre  $s$  e  $t$  si incontrano nel punto  $B$ . Dimostra che, se  $\widehat{AOB}$  è retto, allora  $r \parallel t$ .

**Esercizio 5.2** (es.144 pag.426). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{3}{y} - 2 = -\frac{6}{x} \\ \frac{2}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

**Esercizio 5.3** (es.333 pag.193). Siano  $A$  e  $B$ , rispettivamente, i punti di intersezione della retta di equazione  $2x + y - 2 = 0$  on l'asse  $x$  e con l'asse  $y$ . Dal punto  $A$  conduci la parallela alla retta di equazione  $x + 2y + 1 = 0$  e indica con  $C$  il punto di intersezione di tale parallela con l'asse  $y$ . Determina l'area del triangolo  $ABC$ .

**Esercizio 5.4** (es.917 pag.62). Semplifica la seguente espressione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4})^2}{x + \sqrt{x^2 - 16}} + 3\sqrt{x^2 \left(\frac{x}{4} + 1\right) \left(\frac{x}{4} - 1\right)} + \left(\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right) \left(\sqrt{2} + \frac{x}{2}\right)$$

**Esercizio 5.5** (es.325 pag.438). In un triangolo rettangolo l'area è  $12\text{cm}^2$ , e un cateto supera il doppio dell'altro di  $2\text{cm}$ . Determina le lunghezze dei cateti.

**Esercizio 5.6** (es.159 pag.573). Un città ha una squadra di basket e una di calcio. Si stima che la probabilità che la prima vinca il suo campionato è del  $25\%$ , mentre la probabilità che la seconda vinca il suo è del  $30\%$ . Calcola la probabilità che:

- entrambe le squadre vincano il campionato;
- nessuna delle due squadre vinca il campionato;
- almeno una delle due squadre vinca il campionato;
- solo una delle due squadre vinca il campionato.

**Esercizio 5.7** (es.386 pag.378). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{(x+3)^3}{(x^2-x)(4-x^2)} \geq 0$$

**Esercizio 5.8** (es.559 pag.209). Dato il quadrato di vertici  $A(2;3)$ ,  $B(3;1)$ ,  $C(5;2)$ , dopo averne determinato il quarto vertice  $D$ , trova le coordinate del quadrato a esso simmetrico rispetto alla retta di equazione  $y = 2$  e calcola l'area della figura che si ottiene dall'intersezione dei due quadrati.

## 6 Settimana n°6

**Esercizio 6.1** (es.155 pag.801). È data una circonferenza di diametro  $AB$  e centro  $O$ . Preso un punto  $P$  sulla circonferenza, sia  $H$  la sua proiezione su  $AB$  e  $C$  il punto in cui la tangente alla circonferenza in  $P$  incontra il prolungamento del diametro  $AB$ . Dimostra che  $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{OC} \cdot \overline{HC}$ .  
*Suggerimento:* congiungi  $O$  con  $P$  e ricorda il primo teorema di Euclide.

**Esercizio 6.2** (es.134 pag.425). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} xy^2 + y^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 6.3** (es.314 pag.191). Determina per quali valori di  $k$  la retta di equazione  $2x - (k-2)y + 2 = 0$  è:

- parallela alla retta di equazione  $y = 2x + 1$ ;
- perpendicolare alla retta di equazione  $y = \frac{1}{3}x$ .

**Esercizio 6.4** (es.682 pag.395). Risolvi il seguente sistema di disequazioni. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\begin{cases} 3x - x^2 \geq 0 \\ x^2 + 2(x-1)^2 < 0 \end{cases}$$

**Esercizio 6.5** (es.310 pag.437). Francesca ha acquistato 20 bottoni, di cui alcuni bianchi e altri rossi. Ogni bottone rosso le è costato 15 centesimi in più di ogni bottone bianco; per i bottoni bianchi ha speso complessivamente la cifra spesa complessivamente per l'acquisto dei bottoni rossi, ossia 3 euro e 60 centesimi. Quanti bottoni bianchi ha acquistato Francesca? E qual è il costo di ciascun bottone rosso?

**Esercizio 6.6** (es.192 pag.576). Un'urna contiene 5 biglie rosse e 10 bianche. Si estraggono dall'urna, successivamente, due biglie, senza rimettere nell'urna la prima biglia estratta. Determina la probabilità:

- di estrarre due biglie rosse;
- di estrarre due biglie dello stesso colore;
- di estrarre due biglie di colori diversi.

**Esercizio 6.7** (es.243 pag.372). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$(x+1)(x-1)(x+2) - (x+2)^3 \geq 0$$

**Esercizio 6.8** (es.185 pag.741). In una circonferenza di raggio  $r$  e centro  $O$ , considera una corda  $AB$  avente lunghezza uguale al lato di un quadrato inscritto nella circonferenza. Tracciata la retta  $t$ , perpendicolare ad  $AB$  in  $B$ , indica con  $C$  l'ulteriore punto che tale retta ha in comune con la circonferenza (oltre a  $B$ ).

- Determina un punto  $P$  sulla retta  $t$ , appartenente al semipiano avente come origine la retta  $AB$  cui non appartiene  $O$ , in modo che sia verificata la relazione  $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = 28r^2$ .
- In corrispondenza del punto  $P$  individuato al punto precedente, determina l'area e il perimetro del triangolo  $APC$ .



## 7 Settimana n°7

**Esercizio 7.1** (es.144 pag.626). Siano  $AB$  e  $BC$  due corde di una circonferenza. Traccia:

- la bisettrice dell'angolo  $\widehat{ABC}$ , indicando con  $D$  il suo punto di intersezione con la circonferenza (oltre  $B$ );
- la parallela ad  $AB$  passante per  $D$ , indicando con  $E$  il suo punto di intersezione con la circonferenza (oltre  $D$ ).

Dimostra che  $B\widehat{DC} \cong E\widehat{BD}$ .

**Esercizio 7.2** (es.272 pag.435). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 = (y + z)^2 \\ x - y + z = 1 \\ 2x = 3y + z \end{cases}$$

**Esercizio 7.3** (es.378 pag.196). Scrivi le equazioni delle rette cui appartengono i lati del triangolo  $ABC$ , essendo  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(2; -1)$ .

**Esercizio 7.4** (es.914 pag.62). Semplifica la seguente espressione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2}} + \frac{x^2 + 4x + 4}{\sqrt{x + 2}} + \sqrt{9x^3 + 18x^2}$$

**Esercizio 7.5** (es.337 pag.439). Un rettangolo è inscritto in un cerchio di raggio  $r$  e il suo perimetro misura  $5r$ . Determina le misure dei lati del rettangolo.

**Esercizio 7.6** (es.193 pag.576). Un'urna contiene 5 biglie rosse e 10 bianche. Si estraggono dall'urna, successivamente, due biglie, rimettendo nell'urna la prima biglia estratta. Determina la probabilità:

- di estrarre due biglie rosse;
- di estrarre due biglie dello stesso colore;
- di estrarre due biglie di colori diversi.

**Esercizio 7.7** (es.382 pag.378). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{x^2 - 3x}{(x + 1)(x^2 + x - 2)} \leq 0$$

**Esercizio 7.8** (es.888 pag.309). Determina il punto  $P$ , sull'asse  $y$ , in corrispondenza del quale è minima la somma dei quadrati delle distanze di  $P$  da  $A(-4; 0)$  e  $B(2, 1)$ .

## 8 Settimana n°8

**Esercizio 8.1** (es.116 pag.797). Dato un triangolo rettangolo  $ABC$ , di ipotenusa  $BC$ , considera un punto  $D$  su  $AC$  e un punto  $E$  su  $BC$  tali che vale l'uguaglianza  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$ . Dimostra che  $DE$  è perpendicolare a  $BC$ .

**Esercizio 8.2** (es.121 pag.424). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = xy \\ x^2 + 2xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

**Esercizio 8.3** (es.423 pag.199). Determina il punto  $P$ , di intersezione tra la bisettrice del secondo e del quarto quadrante, e l'asse del segmento di estremi  $A(4; 2)$  e  $B(0; 4)$ .

**Esercizio 8.4** (es.379 pag.395). Risolvi il seguente sistema di disequazioni. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\begin{cases} x^2 - 2x < 15 \\ 2x - x^2 \leq -8 \\ 4x^2 > 12x - 10 \end{cases}$$

**Esercizio 8.5** (es.328 pag.438). La somma delle aree di due quadrati è  $34 \text{ cm}^2$ . Il rettangolo avente base e altezza congruenti rispettivamente alle diagonali dei due quadrati ha area uguale a  $30 \text{ cm}^2$ . Determina le lunghezze dei lati dei due quadrati.

**Esercizio 8.6** (es.80 pag.564). Un'agenzia matrimoniale ha 70 clienti maschi, di cui 50 hanno 40 anni o più, e 80 clienti donne, di cui 20 hanno 35 anni o più. Scelta a caso una coppia formata da un uomo e una donna clienti dell'agenzia, qual è la probabilità che lui abbia 40 o più e lei abbia meno di 35 anni?

**Esercizio 8.7** (es.240 pag.372). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$(3x - 1)^2 - (3x - 1)(3x - 4) \geq (3x - 1)^3 - 27x^3$$

**Esercizio 8.8** (es.176 pag.740). In un trapezio rettangolo  $ABCD$  la base minore  $CD$  è congruente all'altezza  $AD$  e la base maggiore  $AB$  supera di 2 cm la base minore  $CD$ . La somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali del trapezio è  $84 \text{ cm}^2$ . Determina l'area del trapezio.

## 9 Settimana n°9

**Esercizio 9.1** (es.43 pag.652). Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo di ipotenusa  $AB$ . Chiama  $C'$  il simmetrico di  $C$  rispetto ad  $AB$  e dimostra che il quadrilatero  $AC'BC$  è inscritto in una circonferenza. Qual è il centro della circonferenza circoscritta?

**Esercizio 9.2** (es.143 pag.426). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{y} + 1 = -x \\ 3x + 3\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

**Esercizio 9.3** (es.285 pag.190). Verifica che le tre rette di equazioni  $4x - 5y = 6$ ,  $3x - 5y = 2$  e  $2x - 3y - 2 = 0$  passano tutte per uno stesso punto, di cui devi determinare le coordinate.

**Esercizio 9.4** (es.913 pag.62). Semplifica la seguente espressione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})^2 + 2(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{a} - 2\sqrt{b}) + (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2$$

**Esercizio 9.5** (es.339 pag.439). Determina le misure dei lati di un rettangolo, inscritto in un cerchio di raggio  $r$ , il cui perimetro misura  $\frac{28}{5}r$ .

**Esercizio 9.6** (es.214 pag.578). Una formica si trova nell'origine degli assi, in un piano cartesiano. A ogni passo, la formica si muove a caso di una unità nella direzione e nel verso dell'asse  $x$  oppure di una unità nella direzione e nel verso dell'asse  $y$ . Supponi che la formica compia tre passi.

- a. Rappresenta la situazione tramite un diagramma ad albero e deduci quali sono le coordinate dei punti in cui la formica può trovarsi dopo i tre passi.

Determina quindi la probabilità che la formica, nel suo percorso:

- b. passi per il punto  $A(1;1)$ ;  
c. passi per il punto  $B(2;1)$ ;  
d. passi per il punto  $A$  e per il punto  $B$ ;  
e. passi per almeno uno dei due punti  $A$  o  $B$ .

**Esercizio 9.7** (es.390 pag.378). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\frac{\frac{1}{3}x + (\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) - \frac{7}{3}}{x^2 + x - 6} \leq 0$$

**Esercizio 9.8** (es.563 pag.209). Un rombo  $ABCD$  è tale che:

- il vertice  $A$  ha coordinate  $(-1;3)$ ;
- il punto di intersezione delle diagonali ha coordinate  $(2;1)$ ;
- il vertice  $B$  appartiene alla retta di equazione  $y = -3$ .

Determina le coordinate dei vertici  $B$ ,  $C$  e  $D$  del rombo.

## 10 Settimana n°10

**Esercizio 10.1** (es.43 pag.791). Per un punto  $P$ , appartenente al lato  $AB$  di un triangolo  $ABC$ , traccia la parallela alla mediana  $AM$  del triangolo, indicando con  $Q$  il punto in cui tale parallela incontra la retta  $AC$ . Dimostra che  $AP : AB = AQ : AC$ .

*Suggerimento:* indica con  $R$  il punto d'intersezione di  $PQ$  con  $BC$  e applica il teorema di Talete alle rette parallele  $AM$  e  $QR$ , rispetto alle trasversali  $AB$  e  $BC$ . Osserva che  $MB \cong MC$ .

**Esercizio 10.2** (es.25 pag.419). Risolvi il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{2} = \frac{5}{6} \\ (x-y)^2 + (x+y)(x-y) = 6 \end{cases}$$

**Esercizio 10.3** (es.316 pag.191). Determina per quali valori di  $k$  la retta di equazione  $(2k+1)x - (k-3)y + 2 = 0$  è:

- parallela all'asse  $x$ ;
- parallela all'asse  $y$ ;
- parallela alla retta di equazione  $2x + 4y + 3 = 0$ ;
- perpendicolare alla retta di equazione  $2x - 3y + 5 = 0$ .

**Esercizio 10.4** (es.687 pag.395). Risolvi il seguente sistema di disequazioni. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$\begin{cases} x^2 + 5x - 6 > 0 \\ \frac{x^2-4}{x+3} < 0 \end{cases}$$

**Esercizio 10.5** (es.312 pag.437). Chiara ha appeso alla parete un *puzzle* rettangolare di 2000 pezzi. Di questi, 1794 sono interni (cioè, non appartengono alla cornice). Trova quanti pezzi sono disposti lungo il lato più lungo del *puzzle* di Chiara e quanti sono disposti lungo il lato più corto.

**Esercizio 10.6** (es.78 pag.564). Quanti sono i possibili anagrammi della (anche senza significato) della parola «scuola»? Si sceglie a caso uno di questi anagrammi: qual è la probabilità che la terza lettera dell'anagramma sia una vocale e l'ultima una consonante?

**Esercizio 10.7** (es.250 pag.372). Risolvi la seguente disequazione. Ricorda di scrivere le *condizioni d'esistenza*:

$$x(x-1)^2 - (x-2)^3 < (x-2)(x+2)$$

**Esercizio 10.8** (es.178 pag.741). Sia  $ABC$  un triangolo equilatero di lato  $l$ . Determina un punto  $P$  sul lato  $BC$  in modo che sia verificata la relazione  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \frac{8}{9}l^2$ .