LICEO SCIENTIFICO CARLO CATTANEO - Torino - A.S. 2022-23

Docente: Prof. Andrea Ziggioto

CLASSE 5E

Libro di testo:Colori della Matematica volume $5\alpha\beta$, autori Sasso-Zanone, editore DeA

LA STRUTTURA TOPOLOGICA DI $\mathbb{R}$

I simboli di $+\infty$ e $-\infty$: la retta reale estesa $\mathbb{R}^*$. Esempi vari. Concetto di intorno: intorno circolare, intorno destro e intorno sinistro, intorno di $+\infty$ e $-\infty$.
Massimo e minimo assoluto e relativo di una funzione. Punto di massimo e di minimo di una funzione. Esempi. Funzione limitata. Esempi.

RELAZIONI E FUNZIONI

Limiti di funzioni reali di variabile reale e continuità

Definizione intuitiva di limite di una funzione nei quattro casi fondamentali. Esempio di non esistenza del limite: $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Esempio per cui non ha senso calcolare il limite: $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^4-x^2}$.
Algebra degli infiniti. Applicazione al calcolo di limiti di funzioni razionali intere e fratte. Determinazione di eventuali asintoti orizzontali, verticali, obliqui.
Calcolo di limiti di forme indeterminate del tipo $+\infty-\infty$ (con la presenza di funzioni irrazionali).

Definizione di **funzione continua** in un punto e in tutto il dominio. Teorema sulla somma, differenza, prodotto, quoziente e composizione di funzioni continue (senza dimostrazione). Classificazione dei punti di discontinuità: discontinuità a salto, discontinuità eliminabile, discontinuità di seconda specie.

Il limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (con dimostrazione).
Teorema del doppio confronto di limiti (o *dei due carabinieri*), senza dimostrazione.

Limite notevole $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ con dimostrazione. Forme indeterminate 1^∞, 0^0, ∞^0.
Non esistenza del limite globale quando i limiti destro e sinistro sono diversi.

Definizione di successione numerica (utilizzata SOLO nella costruzione dell'integrale di Riemann).

I teoremi sulle funzioni continue

Il Teorema di Weiestrass sui massimi e minimi assoluti (senza dimostrazione).
Il Teorema di esistenza degli zeri (senza dimostrazione) e relative applicazioni alla risoluzione di equazioni trascendenti.
Il Teorema dei valori intermedi (con dimostrazione).

La derivata

Definizione rigorosa di derivata. Significato geometrico e fisico della derivata. Equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto. Applicazione geometrica della derivata alla monotonia di una funzione. Linearità della derivata (senza dimostrazione). Calcolo della derivata delle funzioni potenza x^n

Legame tra derivabilità e continuità (con dimostrazione). Derivata del prodotto (senza dimostrazione). Derivata di a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$ con dimostrazione.

La derivata della funzione composta (senza dimostrazione) e relativi esempi. La derivata del quoziente (senza dimostrazione) e applicazione alla derivata di $\tan x$.

Derivata della funzione inversa (con dimostrazione). Applicazione al calcolo delle derivate di $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$.

L'accelerazione come derivata prima della velocità e come derivata seconda dello spazio. Significato generale della derivata come variazione istantanea di una variabile rispetto ad un'altra.

La derivata seconda e lo studio della concavità di una funzione. La ricerca degli eventuali punti di flesso (a partire dal significato geometrico della derivata). Funzioni concave e convesse.

Analisi dei punti di non derivabilità: punto angoloso, cuspide, punto di flesso a tangente verticale. Teorema del limite della derivata (o *del tappabuchi*) (senza dimostrazione).

Deduzione del grafico di f' a partire da quello di f e viceversa.

I teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema di Fermat (senza dimostrazione).
Teorema di Rolle (con dimostrazione).
Teorema di Lagrange (con dimostrazione) e sua interpretazione geometrica e fisica.
Teorema di Cauchy (con dimostrazione).

Caratterizzazione delle funzioni costanti e delle primitive di una funzione (con relative dimostrazioni).

Criterio di monotonia di una funzione (con dimostrazione)
Criterio di convessità di una funzione (con dimostrazione)

Teorema di De l'Hôpital (con cenni di dimostrazione) e relative applicazioni.

L'integrale indefinito

Le primitive di una funzione.
Integrale delle funzioni elementari (tranne $\log_a x$). Proprietà di linearità dell'integrale.
Integrazione per parti (con dimostrazione). Integrale di $\log_a x$.
Integrazione di funzioni composte.
Integrazione per sostituzione (con dimostrazione).

Le equazioni differenziali

Definizione di equazione differenziale. Ordine di un'equazione differenziale. Soluzione di un'equazione differenziale. Integrale generale di un'equazione differenziale. Integrale particolare di un'equazione differenziale. Condizioni iniziali. Problema di Cauchy. Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.

L'integrale definito secondo Riemann

La costruzione dell'integrale definito secondo Riemann. Proprietà dell'integrale definito. Il Teorema della valor medio (con dimostrazione). Il Teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione). La formula fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione).
Calcolo di aree di figure piane e di volumi di solidi mediante l'integrale definito.
Studio di funzioni integrali (in particolare, calcolo della loro derivata quando il secondo estremo varia secondo una funzione $g(x)$).
Gli integrali impropri su intervalli illimitati.

DATI E PREVISIONI

Variabili aleatorie e distribuzioni discrete di probabilità : definizioni, media, varianza e deviazione standard.
La distribuzione binomiale (o di Bernoulli) con dimostrazione della relativa formula.
La distribuzione di Poisson con relativa dimostrazione sul suo legame con la distribuzione di Bernoulli.
La variabili aleatorie continue. La funzione densità di probabilità per variabili aleatorie continue. Media, mediana e varianza di variabili aleatorie continue. La funzione di ripartizione per variabili aleatorie continue.
La distribuzione di Gauss e relative applicazioni. La normale standardizzata e l'uso delle tavole.

GEOMETRIA

Geometria analitica dello spazio: coordinate cartesiane nello spazio, vettori nello spazio e operazioni tra di essi, equazione di un piano, equazione di una retta nello spazio, equazione della superficie sferica, relativi problemi tratti dalle prove di Esame di Stato degli anni passati.

COMPLEMENTI

Sono stati affrontati anche i seguenti argomenti, in modo non approfondito, ma semplicemente come spunto introduttivo o come completamento importante da un punto di vista culturale, utilizzando anche l'ora di potenziamento:

1. Metodo di esaustione per il calcolo della lunghezza della circonferenza.

2. Le funzioni iperboliche e relative applicazioni.

3. La formula di Taylor e MacLaurin. Questa è stata introdotta a partire dal problema di approssimazione di una funzione in un intorno di un punto con un polinomio di grado superiore al primo (già risolto con la retta tangente). E' stato dato il concetto di resto in forma di Peano ma non in forma di Lagrange.

4. Introduzione alla Statistica inferenziale. Qui si è fatto cenno ai metodi della stima puntuale e della stima intervallare, con particolare riferimento alla determinazione dell'intervallo di confidenza per la

media e per una proporzione. Si è anche accennato alla tecnica del test d'ipotesi nel caso in cui si conosca la varianza della popolazione.

5. Note storiche sulla evoluzione dell'Analisi Matematica, con particolare riferimento alle figure di Joseph-Louis Lagrange, Augustin Cauchy e Francesco Faa' di Bruno e i loro legami con la città di Torino.

Torino, 9 giugno 2023

Il docente

Prof. Andrea Ziggioto